جزوه درس کاربرد ریاضیات در مهندسی شیمی

مدرس: مهندس رزمی

گردآورنده: محمد مرادزاده

فرمول و مدل سازی در مهندسی شیمی :
یکی از روش های متداول طبق بررسی و مطالعه متغیرهای سیستم و اثر متقابل آن ها بر هم استفاده از مدل ریاضی
است منظور از مدل ریاضی یافتن معادله یا معادله هایی است که میزان تأثیر پارامترها یا متغیرها را روی
رفتار سیستم نشان می دهند مدل سازی ریاضی سیستم ها و فرآیندهای مختلف بر اساس قوانین پایه
(سینتیکی، حرارتی، ترمودینامیکی و سیالاتی) می باشد همچنین می توان از سینتیک و رفتار غیر دینامیکی
سیالات تحت معادلات سرعت کمک گرفت.

برای مدل سازی ریاضی مراحل مختلفی وجود دارد که به صورت زیر بیان می شود

۱) شناخت دقیق فیزیک مسأله و کلیه شرایط فیزیکی حاکم بر آن

۲) تعیین پارامترهای مستقل و غیر مستقل در سیستم های کارتزین (x, y, z, t) سیستم های استوانه ای
(r, θ, z, t) در سیستم های کروی (t, r, θ, φ)

۳) تعیین مشخصات سینتیکی و فیزیکی و شیمیایی سیستم و نحوه تغییرات آن ها

۴) انتخاب سیستم با حجم کنترل مناسب (سیالاتی، حرارتی، سینتیکی)

۵) انتخاب قوانین کلی حاکم بر اثر

۶) قرار دادن روابط و قوانین خاص در قوانین کلی

۷) فرضیات ساده کننده بر فیزیک مسأله

Sabject :   Date :   /   /

۸) تعیین شرایط اولیه و مرزی مناسب

۹) انتخاب راه حل مناسب برای حل معادلات

۱۰) تجزیه و تحلیل سیستم ها

سیستم هایی که فقط تابع زمان باشند که مشخصات مکانی وجود نداشته باشند مانند یک نقطه مادی تلقی می شوند که دمای آن سیستم با فرمول اسیون لامپیو در نظر گرفت مثلاً گرم شدن یک گلوله کوچک که ضریب هدایت حرارتی آن بالاست می تواند یک سیستم لامپید باشد زیرا در این حالت اختلاط کامل موجود بوده زیرا دما در تمام نقاط و شعاع ها یکسان و توزیع دمایی در شعاع های مختلف وجود ندارد همچنین چون اختلاط کامل است از نظر سینتیکی سیستم یکنواخت و فقط دما تابع زمان است

قوانین بقاء :

۱- بقای جرمی

۲- بقای انرژی

۳- بقای ترمودینامیکی

۱- بقای جرمی :

$\Delta w_i - R_i = \frac{dm_i}{dz}$

تفاضل دبی جرمی ورودی و خروجی جرم

شدت از بین رفتن یا تولید جزء والنس شیمیایی

تجمع

۲- بقای انرژی

$\Delta E = Q - W$

مجموع کارهای انجام شده

مجموع انرژی های سیستم (داخلی سینتیکی و پتانسیلی)

مجموع حرارت جذب شده توسط سیستم

۳- تعادل ترمودینامیکی

میزان حرارت جذب شده در دمای T

$$\Delta (s_i w_i) + \frac{q}{t} + S_g = \frac{ds}{dt} \rightarrow$$ تجمع یا تغییرات آنتروپی

تفاضل آنتروپی ورودی، خروجی همراه با دبی جرمی

میزان آنتروپی تولیدی یا افزایش یافته

مثال:

کره فلزی به شعاع R_0 با دمای ابتدایی t_0 از کوره‌ای در آمده و با هوا با دمای T_∞ به شکلی که $T_\infty < t_0$ باشد

سرد می‌شود توزیع دما در این کره بیابید؟ الف) فرض کنید K بزرگ و R_0 کوچک باشد

ب) فرض کنید K بزرگ نباشد و R_0 کوچک نباشد

K ضریب حرارت هدایتی کره

h ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی

$T_0 > T_\infty$

حل الف) طبق این فرض اختلاف کامل دمایی وجود دارد و در شعاع‌های مختلف توزیع دما موجود نیست

و در نتیجه سیستم لامپ خواهد بود و دما فقط تابع زمان است.

چون کاری انجام نداده

$$\Delta E = \Delta Q - \cancel{\Delta w} \Rightarrow -A\rho c_p \frac{dT(t)}{dt} = AR(T(t) - T_\infty)$$

انتقال حرارت از طریق جابه‌جایی است که قانون سرد شدن نیوتن را جایگذاری می‌کنیم.

$$-\frac{4}{3}\pi R_0^3 \cdot \rho \cdot c_p \cdot \frac{dT(t)}{dt} = 4\pi R_0^2 h (T(t) - T_\infty) \quad (1)$$

فرض می‌کنیم $$\frac{R_0 \cdot \rho \cdot c_p}{3h} = \beta$$

$$\beta \frac{dT(t)}{dt} + T(t) = T_\infty$$

$$\boxed{\frac{dT(t)}{dt} = \frac{T_\infty - T(t)}{\beta} \;\Big|\; \rightarrow T(t=0) = T_0}$$

شرایط مرزی

با فرض دوم می‌توان نتیجه گرفت اختلاف حاصل از تفکر سیلیکی وجود ندارد و از آنجایی که هیچ هیچی در سیستم موجود

شناسی در هر شعاعی دمای خاصی وجود دارد یعنی اینکه توزیع دمایی در شعاع وجود دارد که می توان گفت

که دما تابع زمان و شعاع خواهد بود. $\Delta E = \Delta Q + \Delta W$

حل ب) $4\pi r^2 \Delta r \cdot \rho \cdot c_p \cdot T(r, t+\Delta t) - 4\pi r^2 \cdot \Delta r \cdot \rho \cdot c_p \cdot T(r,t)$

دمای خروجی — دمای ورودی

$= 4\pi r^2 \cdot q_r \, \Delta t - 4\pi r^2 \, q_{r+\Delta r} \, \Delta t$

* در این حالت دما تابع r و t می باشد یعنی دیگر نمی توان فرض نمود دما در کره در هر لحظه در تمامی نقاط یکسان است.

شار حرارتی ورودی به آن

عبارت فوق بر $4\pi \Delta r \Delta t$ تقسیم می کنیم

طرفین $\times \frac{1}{r^2}$

تعریف مشتق — برای — جنس مشتق

$$\rho \cdot c_p \frac{T(r,t+\Delta t) - T(r,t)}{\Delta t} = -\frac{1}{r^2} \frac{r^2 q_{r+\Delta r} - r^2 q_r}{\Delta r}$$

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\delta T(r,t)}{\delta t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\delta}{\delta r} \left(r^2 q_r \right) \rightarrow q_r = -k \frac{\delta T}{\delta r}$$

جایگذاری q_r

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\delta T(r,t)}{\delta t} = \frac{k}{r^2} \cdot \frac{\delta}{\delta r} \left(\frac{r^2 \, \delta T(r,t)}{\delta r} \right) \qquad \boxed{\alpha = \frac{k}{\rho c_p}}$$

ضریب نفوذ حرارتی

$$\frac{\delta T(r,t)}{\delta t} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{\delta}{\delta r} \left(r^2 \frac{\delta T(r,t)}{\delta r} \right)$$

$T(r,0) = T_0$ معادله دیفرانسیل برحسب t درجه اول است پس یک شرط اولیه مرزی نیاز است

$T(0,t) =$ محدود $\frac{\delta T(0,t)}{\delta r} = 0$ و چون معادله دیفرانسیل برحسب R درجه دوم

دمای محدود در مرکز کره را بیان می کند

$$-k \frac{\delta T(R_0,t)}{\delta r} = h \left(T(R_0,t) - T_\infty \right)$$

پس دو شرط مرزی مورد نیاز

Canv = Cand

در زمان اولیه دما صفر

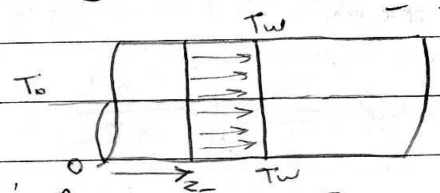
در شعاع برابر صفر تغییرات دما وجود ندارد (دمای محدود در مرکز کره)

Sabject : Date : / /

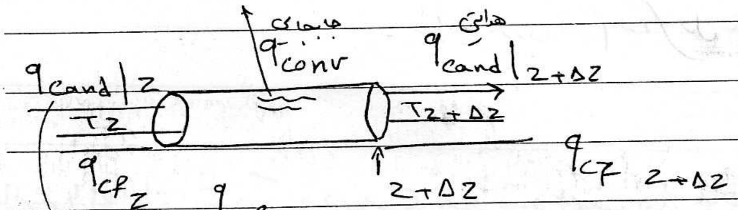
مثال ۱۰: کیم 1 ۲-۱

سیالی پایدار و آرام با سرعت V در لوله با شعاع R و دمای دیواره ثابت جاری است اگر دما T_0 باشد

و ضریب انتقال حرارت جابجایی بین سیال و سطح داخلی لوله h باشد توزیع دما را بیابید الف) جریان درهم باشد.



نکته: هنگامی که جریان درهم باشد یا سرعت بالا است و یا Re خیلی بالا باشد جریان دارای اختلاط کامل می باشد و می توان سیستم را یک سیستم لامپید در نظر گرفت لامپید این مسئله فقط تابعیت طولی را بیان می کند در غیر این صورت هم تابع شعاع و هم تابع طول لوله می شود



q_{cf} (cf) از جنس انتقالی بلحاظ سرعت

بلحاظ درطول سیال نفوذ مولکولی

q_{cf} حرارتی که با سیال وجود دارد به داخل جزء نفوذ می کند

$\cancel{\Delta E} = \Delta Q - \Delta W$

$$q_{cond}\Big|_z + q_{cf}\Big|_z - q_{cond}\Big|_{z+\Delta z} - q_{cf}\Big|_{z+\Delta z} - q_{conv} = 0$$

$$-K\pi R^2 \frac{\partial T(z)}{\partial z} + V_z \pi R^2 \rho c_p T(z) - \left(-K\pi R^2 \frac{\partial T(z+\Delta z)}{\partial z}\right)$$

$$-V \pi R^2 \rho c_p T(z+\Delta z) - 2\pi R \Delta z h \left(\frac{T(z+\Delta z) - T(z)}{2} - T_w\right)$$

$$\frac{T(z+\Delta z) + T(z)}{2} = T_b = T_{ref}$$ دمای مرجع

چون دمای سیال در جزء مورد نظر در فاصله z تا $z+\Delta z$ متغیر است متوسط آن را در نظر می گیریم

$$\begin{cases} q_{cond} = KA \dfrac{\partial T}{\partial t} \\ q_{conv} = Ah(T - T_w) \\ q_{cf} = VA\rho C_p (T - T_{ref}) \end{cases}$$

Sabject : از هر عبارت lim می گیریم Date : / /

طرفین رابطه را $\div \pi R_0^2 \Delta z$

$$k\,\frac{\frac{\partial T(z+\Delta z)}{\partial z}-\frac{\partial T(z)}{\partial z}}{\partial z}-V_0\,\rho\,c_p\,\frac{T(z+\Delta z)-T(z)}{\Delta z}$$

$$-\frac{2h}{R_0}\left(\frac{T(z+\Delta z)+T(z)}{2}-T_w\right)=0$$

در معادله فوق اگر Δz به سمت صفر میل کند داریم:

$$\Rightarrow k\,\frac{d^2T(z)}{dz^2}-V_0\,\rho\,c_p\,\frac{dT(z)}{dz}-\frac{2h}{R_0}\big(T(z)-T(w)\big)=0$$

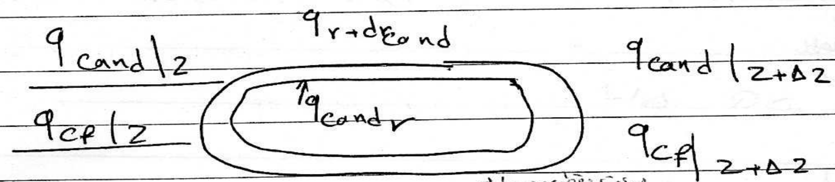
جریان حرارت ورودی به صورت آنتالپی — اتلاف حرارت به دیواره

$$V_0\,\rho\,c_p\,\frac{dT(z)}{dz}=\frac{2h}{R_0}\big(T(z)-T_w\big)$$

$$\begin{cases} T(z=0)=T_0 \\ T(z=\infty)=T_w \end{cases}$$

شرایط مرزی لازم برای حل معادله بالا:

ب) اگر جریان آرام باشد در اینصورت در هر شعاعی یک دمای خاص خود را دارد و می توان گفت دما تابع z و نسبت به شعاع هم وابسته است



$V_z=2V_0\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$ — $V_z=$ سرعت نقطه‌ای سیال در هر شعاعی با r ، $V_0=$ متوسط سرعت

$T(r,z)$ * در این صورت سیال دارای اختلاط کامل در جهت r نبوده لذا دما تابع z و r می باشد.

$$\underbrace{V_z(2\pi r\Delta r)\,\rho\,c_p\,T(r,z)}_{q_{cf\,z}}-\underbrace{V_z(2\pi r\,\Delta r)\,\rho\,c_p\,T(r,z+\Delta z)}_{q_{cf\,z+dz}}+2\pi r\Delta r\,q_z\big|_z$$

$$-2\pi r\,\Delta r\,q_z\big|_{z+\Delta z}+2\pi r\Delta z\,q_r\big|_r-2\pi r\,\Delta z\,q_r\big|_{r+dr}=0$$

$\boxed{\text{تقسیم بر } 2\pi\Delta r\Delta z}$

$$-V_z\,\rho\,c_p\,r\,\frac{T(r,z+\Delta z)-T(r,z)}{\Delta z}-\frac{(r\,q_z)\big|_{z+\Delta z}-r(q_z)\big|_z}{\partial z}$$

حد معادله وقتی $\Delta r\to 0$ ، $\Delta z\to 0$

$$-\frac{r\,q_r\big|_{r+dr}-(r\,q_r)_r}{\Delta r}=0$$

Sabject : Date : / /

$$-\underbrace{v_z}_{v_z} \cdot \rho \cdot c_p\, r \frac{\partial T(r,z)}{\partial z} - \frac{\partial (r q_z)}{\partial z} - \frac{\partial (r q_r)}{\partial r} = 0 \Rightarrow \begin{cases} q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r} \\ q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \end{cases}$$

$$2v_0 \cdot \rho \cdot c_p \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \frac{\partial T(r,z)}{\partial z} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T(r,z)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T(r,z)}{\partial z^2} \right]$$

$$\begin{cases} -k \frac{\partial T(R,z)}{\partial r} = h\left(T(R,z) - T_w\right) \\ T(0,z) = \text{کران دار} \qquad T(r, \infty) = T_w \\ \qquad\qquad\qquad \to \frac{\partial T(0,z)}{\partial r} = 0 \\ T(r,0) = T_0 \end{cases}$$

حل تمرین (صفحه ۲۳)

$$\frac{Db}{Dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + v_x \frac{\partial b}{\partial x} + v_y \frac{\partial b}{\partial y} + v_z \frac{\partial b}{\partial z}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) = \frac{\partial b}{\partial t} + v \cdot \nabla b$$

دانسیته گرمای ویژه

معادلات انتقال حرارت، مومنتوم و جرم:

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{DT}{Dt} + \nabla q = u''' \rightarrow$$ حرارت تولید شده به ازای واحد حجم

مقدار حرارت نفوذی به

$$\boxed{q = -k \nabla T} \xrightarrow{\text{جاگذاری}} \rho \cdot c_p \cdot \frac{DT}{Dt} + \nabla(-k \nabla T) = u'''$$

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{DT}{Dt} = \nabla k \cdot \nabla T + k \nabla^2 T + u'''$$

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + u''' \longrightarrow$$ تدریس

حل تمرین مدل های نفوذ حرارت k، ρ، C، CTe

استوانه

$$\frac{D(\,)}{Dt} = \frac{\partial(\,)}{\partial t} + v_x \frac{\partial(\,)}{\partial x} + v_y \frac{\partial(\,)}{\partial y} + v_z \frac{\partial(\,)}{\partial z}$$

کروی :
$$\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + V_r\frac{\partial()}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial()}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial()}{\partial \phi}$$

کارتزین :
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2()}{\partial x^2} + \frac{\partial^2()}{\partial y^2} + \frac{\partial^2()}{\partial z^2}$$

استوانه‌ای :
$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial()}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2()}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2()}{\partial z^2}$$

یا

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2()}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial()}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2()}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2()}{\partial z^2}$$

کروی :
$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial()}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2()}{\partial \phi^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_x\frac{\partial T}{\partial x} + V_y\frac{\partial T}{\partial y} + V_z\frac{\partial T}{\partial z} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{u'''}{\rho c_p}$$

2. معادلات غیرقابل تراکم $K = cte$ و ρ جریان آرام در حالت پایدار

$$V \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T$$

3. حالت 2 برای جامدات $V = 0$

$$\nabla^2 T + \frac{u'''}{\rho c_p}$$

4- برای جامدات بدون تولید $\nabla^2 T = 0$

مثال 1 قسمت ب) صفحه ۲۶

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \cancel{V_r\frac{\partial T}{\partial r}} + \cancel{\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{V_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}}\right) = K\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cancel{\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)} + \cancel{\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}}\right] + u'' \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]$$

$V_r = V_\theta = V_\phi = 0$ در این مسئله دیگر نداریم تغییرات T فقط تابع (r, t) است

(r,t) $\frac{\partial T}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

$T = f(r, z)$ در مختصات استوانه‌ای

$$\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} + \cancel{v_r \frac{\partial T}{\partial r}} + \cancel{\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

$$+ \cancel{\frac{q'''}{\rho c_p}} \Rightarrow v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]$$

$$\Rightarrow \underbrace{2 v_0 \left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)}_{v_z} \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)\right]$$

مثال ۵: صفحه ۳۲

دیواره یک راکتوری به شعاع R و به طول L با کاتالیزور پوشش داده شده است این دیواره در دمای ثابت T_{wall} بوده و گاز A با غلظت ورودی متوسط c_i و با سرعت ثابت v با همین دمای ثابت از لوله عبور می‌کند. گاز روی سطح کاتالیست تحت یک واکنش غیر بازگشتی درجه اول تجزیه می‌شود معادله دیفرانسیلی با شرایط مرزی بدست آورید که با حل آن توزیع غلظت در این راکتور بدست آوریم.

① در اینجا متغیر غلظت خواهد بود (برای توزیع در فاز گاز در راکتور لوله‌ای کاتالیستی در حالت یکنواخت $\frac{\partial c}{\partial r}=0$ با v_r

① $c = f(r, z)$

$v_r \ll v_z$

* در مختصات استوانه‌ای داریم

$$\cancel{\frac{\partial c}{\partial t}} + \cancel{v_r \frac{\partial c}{\partial r}} + \cancel{\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial c}{\partial \theta}} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} = D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial c}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 c}{\partial \theta^2}} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right]$$

$$\boxed{v_z \frac{\partial c}{\partial z} = D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial c}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right]}$$

$c(r, 0) = c_i$

$$\frac{\partial c(0, z)}{\partial r} = 0 \qquad \Rightarrow J_A = -r_A$$

$$-D\frac{\partial c(R, z)}{\partial r} = KC$$

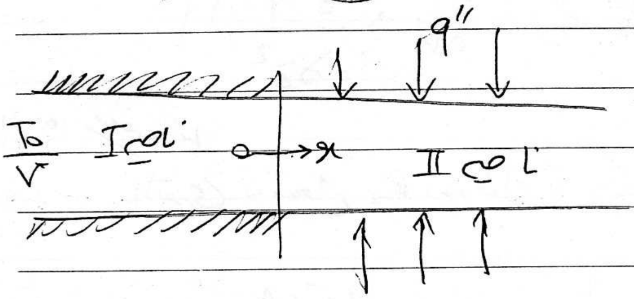
یادآوری

$$J_A = -c D_{AB} \frac{d x_A}{d z} \qquad J_A = -D_{AB}\frac{dA}{dz}$$

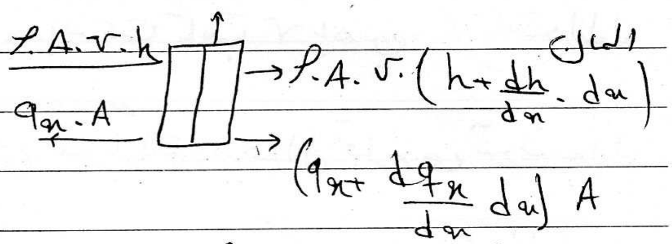
مثال

سیالی با سرعت خطی ثابت V در لوله‌ای با سطح مقطع A و محیط P جریان دارد. مطابق شکل زیر نیمی از لوله عایق بندی شده و نیمی دیگر شار حرارت ثابتی را به اندازه q'' به ازای واحد طول می‌رسد. حالت

یکنواخت معادلات دیفرانسیلی بدست آورید که از حل آن بتوان دمای سیال را در دو ناحیه لوله بدست آورید.



$q''.P\,dx$



(1)

$$\rho.A.V.h + q_x A - \rho.A.V(h+\frac{dh}{dx}dx) - (q_x + \frac{dq_x}{dx}dx)A + q''.P.dx = 0$$

$$\boxed{-A\frac{dq_x}{dx} - \rho.A.V.\frac{dh}{dx} + q''P = 0} \quad (2)$$

$$q_x = -k\frac{dT}{dx} \rightarrow$$ جایگذاری و تقسیم بر KA $$\boxed{dh = c_p\, dT}$$

$$(3) \quad \boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{\rho.c.V}{k}\frac{dT}{dx} + \frac{q''.P}{k.A} = 0}$$ بدون عایق

$\frac{q''.P}{k.A} = 0$ با عایق

$$\boxed{\rho.c_p.\frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + q'''}$$ فرمول

$$\rho.c_p\left(\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} + V_x\frac{\partial T}{\partial x} + \cancel{V_y\frac{\partial T}{\partial y}} + \cancel{V_z\frac{\partial T}{\partial z}}\right) = k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}\right] + \frac{q''P}{A}$$

$$\rho.c.V_x\frac{dT}{dx} - k\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q''P}{A} = 0$$ بدون عایق

معادلات دیفرانسیل معمولی :

آن دسته از معادلاتی که در مسائل مهندسی با آن برخورد می شود معادلات دیفرانسیل معمولی است هدف از این معادله یافتن رابطه بین متغیرها بدون استفاده از مشتق است به طوری که این معادله بتواند معادله دیفرانسیل را ارضا کند.

الف) روش جداسازی :

$$f_1(x)\,g_1(y)\,dx + f_2(x)\,g_2(y)\,dy = 0$$

تقسیم می کنیم $f_2(x)\,g_1(y) \neq 0$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = 0$$

$$\boxed{\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = c}$$

مطلوب حل معادله دیفرانسیل

Ex) $(4x + xy^2)\,dx + (y + x^2y)\,dy = 0$

Sol: $x(4+y^2)\,dx + y(1+x^2)\,dy = 0 \xrightarrow[\text{و پس انتگرال گیری می کنیم}]{\div (4+y^2)(1+x^2)}$

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int \frac{y}{4+y^2}\,dy = c$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(4+y^2)$$

$$\ln\sqrt{(1+x^2)(4+y^2)} = c \Rightarrow (1+x^2)(4+y^2)\,e^{2c} = c_1$$

طرفین به توان ۲

معادلات دیفرانسیل کامل:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$\boxed{\int M\,dx + \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M\,dx\right)\right] dy = C}$$

مثال:

$$(3x^2 + y\cos x)\,dx + (\sin x - 4y^3)\,dy = 0$$

$$M(x,y) = 3x^2 + y\cos x \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \cos x$$

$$N(x,y) = \sin x - 4y^3 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x$$

کامل

$$\int (3x^2 + y\cos x)\,dx + \int \left[\sin x - 4y^3 - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int 3x^2 + y\cos x\,dx\right)\right] dy$$

$$(x^3 + y\sin x) + \int \left[\sin x - 4y^3 - \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y\sin x)\right] dy = C \qquad \left(\cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}} + y\sin x\right)$$

$$(x^3 + y\sin x) + \int [\sin x - 4y^3 - \sin x]\,dy = C \qquad \cancel{-\sin x}$$

$$= x^3 + y\sin x - y^4 \; C$$

روش فاکتور انتگرال: IF

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \text{کامل نیست}$$

$$\mu M(x,y)\,dx + \mu N(x,y)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\mu(\partial N)}{\partial x} \qquad \text{If } \mu = e^{\int f(x)\,dx}$$

در صورتی که فقط $f(x)$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

یا اگر

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

$f(y)$

$$\text{If} = \mu = e^{\int g(y)\,dy}$$

$\ln y \propto \frac{1}{y} + y$ مشتق اول × مشتق دوم

مثال ۵: ۲-۲ ص ۲۶

$y \ln y \, dx + (x - \ln y)\, dy = 0$

$M(x,y) = y\ln y \quad , \quad N(x,y) = (x - \ln y)$

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \ln y \neq 1$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{1 - \ln y}{y \ln y} = -\frac{1}{y}$$

$\mu = e^{\int F(y)\, dy} \Rightarrow \mu = e^{\int \frac{dy}{-y}} = \frac{1}{y} \Rightarrow$ y را در عبارت ضرب می‌کنیم تا دیفرانسیل کامل شود

$$\int \ln y \, dx + \int \left[\frac{x - \ln y}{y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \ln y \, dx\right) \right] dy = c$$

$$x\ln y - \int \frac{\ln y}{y}\, dy = c \Rightarrow x \ln y - \int \ln y \cdot d(\ln y) = c$$

$$x\ln y - \frac{(\ln y)^2}{2} = c \xRightarrow{\times 2} \boxed{2x(\ln y) - (\ln y)^2 = c}$$

مثال ۶: ص

$(x^2 + y^2 + x)\, dx + xy\, dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1}{x} \Rightarrow \mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} \Rightarrow e^{\ln x} = x$$

$(x^3 + xy^2 + x^2)\, dx + x^2 y\, dy = 0$

$$\int (x^3 + xy^2 + x^2)\, dx - \left[\int \left(x^2 y - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int x^3 + xy^2 + x^2\right) dx\right) \right] dy = c \qquad yx^2$$

چون نسبت به y انتگرال گرفته

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \int (x^2 y - y x^2)\, dy = c$$

ARSH

$$\boxed{\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2} = c}$$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(y/x\right)$$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = d\left(tg^{-1}\left(y/x\right)\right)$$

$$\frac{x\,dy + y\,dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\, d\left[\operatorname{Ln} x^2 + y^2\right]$$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = -d\left(x/y\right)$$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}\, d\left[\operatorname{Ln} \frac{x-y}{x+y}\right]$$

معادلات هموژن یا همگن:

شکل کلی معادله:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(y/x\right)$$

برای حل معادلات با قرار دادن

$$\begin{cases} y/x = v \\ \text{یا} \\ y = v \cdot x \end{cases}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = F(v)$$

$$\xrightarrow{\times dx} x\,dv - \left(F(v) - v\right)dx = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dv}{F(v) - v} = C$$

پس از انتگرال گیری ← $v = y/x$

و بعد جواب نهایی بدست می‌آید.

مثال ⑧

$$(2x^3+y^3)\,dx-3xy^2\,dy=0 \xRightarrow{\text{مرتب سازی}} \frac{dy}{dx}=\frac{2x^3+y^3}{3xy^2}$$

جدا سازی

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x^3}{3xy^2}+\frac{y^3}{3xy^2}\overset{\text{تفکیک}}{=}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{(y/x)^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$v=\left(\frac{y}{x}\right)\Rightarrow y=vx\Rightarrow dy=v\,dx+x\,dv\xRightarrow{\div dx}\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2}{3v^2}+\frac{1}{3}v$$

$$\frac{x\,dv}{dx}=\frac{2}{3v^2}+\frac{v}{3}-v\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}\frac{2-2v^3}{3v^2}$$

$$\frac{x\,dv}{dx}=\frac{\overset{2(1-v^3)}{2-2v^3}}{3v^2}\overset{\text{معکوس}}{\Longrightarrow}-2\frac{dx}{x}=\frac{3v^2\,dv}{v^3-1}\Rightarrow\int -2\ln x=\ln(v^3-1)+C$$

$$\ln\left[x^2(v^3-1)\right]=C \qquad v=y/x$$

$$\frac{y^3-x^3}{x}=e^C=C_1\Rightarrow \boxed{y^3-x^3=C\cdot x}$$

معادلات برنولی:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)\cdot y^n$$

$$v=y^{1-n}$$

$$dv=(1-n)y^{-n}\,dy=\frac{1}{1-n}y^n\,dv$$

$$\frac{1}{1-n}y^n\frac{dv}{dx}+p(x)\cdot y=Q(x)\cdot y^n$$

بر y^n تقسیم کنیم

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

$$\frac{dv}{dx}+(1-n)P(x)v=(1-n)Q(x)$$

روش حل معادلات برنولی

$$\boxed{v e^{(1-n)\int P dx}=(1-n)\int Q\cdot e^{(1-n)\int P dx}\cdot dx+c}$$

مثال

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}+\frac{1}{3}y}_{P(x)}=\underbrace{\frac{1}{3}(1-2x)y^4}_{Q(x)} \qquad n=4$$

$$v=y^{1-n}\Rightarrow v=y^{-3}\Rightarrow v'=-\frac{1}{3}y$$

$$\frac{dv}{dx}-v=2x-1\Rightarrow ve^{-x}=\int(2x-1)e^{-x}dx+c$$

$$-\frac{1}{3}e^{-x}=\int(2x-1)e^{-x}dx+c$$

$$\frac{1}{y^3}=(-1-2x+ce^{x})\Rightarrow y^3(1-2x+ce^{x})=1$$

معادلات دیفرانسیل خطی:

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=R(x)$$

شکل کلی

$$\frac{d}{dx}=D$$

$$\frac{d^2}{dx^2}=D^2 \qquad [a_0(x)D^n+a_1(x)D^{n-1}+\dots a_{n-1}(x)D+a_n(x)]y=R(x)$$

مشتق n ام $\frac{d^n}{dx^n}=D^n \qquad \phi(D)=a_0(x)D^n+a_1(x)D^{n-1}$

$$\boxed{\phi(D)y=R(x)}$$

همگن $\phi(D)y=0$

غیرهمگن $=R(x)$

$y = y_c(x) + y_p(x)$ جواب معادله غیرهمگن

مجموعه n تابع $y_1(x)$ تا $y_n(x)$ وابسته خطی گویند اگر n تا ثابت c_1 تا c_n به نحوی وجود داشته باشد

که همگی با هم صفر نباشند به نحوی که رابطه زیر داشته باشیم

$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$

وابسته خطی گویند در غیر این صورت مستقل خطی در صورتی که تمام توابع مشتق پذیر باشند

دترمینال ماتریس c که به رانسکین توابع معروف است

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \dots & y_n^{n-1} \end{bmatrix} \neq 0$$

روش حل ها: اپراتورها الف) همگن (غیر)

$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n) y = 0$ برای یافتن جواب D را

$D = m_1, m_2, \dots$ ریشه دارد

$a(D - m_1)(D - m_2) \dots (D - m_n) = 0$ معادله اصلی

ریشه ها:

۱- تمام ریشه ها یا m ها مقادیر حقیقی نابرابر باشند $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x}$

$m = a + bi$

۲- بعضی از ریشه ها مختلط باشند $y = e^{ax}(c_1 \cos bx + i c_2 \sin bx)$

۳- بعضی از ریشه مساوی باشد $m_1 = m_2 = \dots$ $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_n x^{n-1}) e^{mx}$

مثال :

$(D+2)^3(D-3)(D^2+D+5)y=0$

$m_1=-2,-2,-2$

$m_2=-1\pm 2i$

$m_3=3$

$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-2x}+C_4e^{-x}(C_4(\cos 2x+i\sin 2x))$
$+C_5e^{3x}$

غیرهمگن :

جدول ۱-۲ کتاب ص 58

$R(x)$ به ازای	y_p جواب
Fe^{px}	ae^{px}

مثال :

$(D^2-4)y=\sin 2x$

* جهت یافتن جواب های خاص باید $f(x)=\sin 2x$ را در نظر گرفت و جمله $\sin 2x$ و مشتقات آن را در y_p قرار داد.

$(D^2-4)y=0 \qquad m=\pm 2$

$y_c=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$

$(D^2-4)y_p=\sin 2x)$

$y_p=A\sin 2x+B\cos 2x$

جایگذاری می کنیم

$(D^2-4)(A\sin 2x+B\cos 2x)=\sin 2x$

اول از پرانتز مشتق دوم می گیریم سپس ۴- را در پرانتز ضرب می کنیم

$\cancel{\sin 2x}-8A\sin 2x-8B\cos 2x=\sin 2x$

$=(-4A\sin 2x-4B\cos 2x-4A\sin 2x-4B\cos 2x)=$

$-8A\sin 2x=\sin 2x \Rightarrow A=-1/8$

$-8B\cos 2x=0 \Rightarrow B=0$

$y=y_c+y_p$

$$\boxed{y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-1/8\sin 2x}$$

Sabject : Date : / /

نکته

اگر y_p جمله مشابه با y_c داشته باشد جملات مشابه در y_p در x^n ضرب کنیم که n کوچکترین توان مثبت که با ضرب x^n در جملات y_p تشابه y_p و y_c از بین برود

مثال:

$$(D-2)^2 y = \underbrace{e^x}_{y_{p_1}} + \underbrace{xe^{2x}}_{y_{p_2}}$$

$$(D-2)^2 y = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 2$$

$$y_c = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

$$y_{p_1} = (D-2)^2 y = e^x$$

$$y_{p_1} = Ae^x \Rightarrow (D-2)^2 \cdot (Ae^x) = e^x \Rightarrow A = 1 \qquad \boxed{y_{p_1} = e^x}$$

$$(\underbrace{D^2}_{\text{توان دو}} - \underbrace{4D}_{\text{توان ۱}} + 4) \cdot (Ae^x)$$

$$y_{p_2} = xe^{2x} \Rightarrow y_{p_2} = (Bx + C) \cdot x^2 e^{2x} \quad ?$$

با توجه به نکته بالا

$$(D-2)^2 \left[(Bx + C) \cdot x^2 e^{2x}\right] = xe^{2x}$$

$$(D^2 - 4D + 4)\left[(Bx + C) \cdot x^2 e^{2x}\right] = xe^{2x} \Rightarrow \boxed{B = 1/6} \quad \boxed{C = 0}$$

$$y_{p_2} = (1/6\, x)(x^2 e^{2x}) = 1/6\, x^3 e^{2x}$$

$$y = y_c + y_{p_1} + y_{p_2}$$

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + c_3 e^x + \frac{c_4}{6} x^3 e^{2x}$$

روش اپراتوری:
جواب غیرهمگن:
1- روش کاهش درجه
2- روش اوپراتوری معکوس

$\phi(D)y = R(x)$

$\phi(D)y = 0$ $m_1, m_2, \dots m_n$ ریشه

$(a_0(D-m_1)(D-m_2)(D-m_3)\dots(D-m_n))y = R(x)$

$a_0(D-m_2)(D-m_3)\dots(D-m_n) = Y_1$

$(D-m_1)Y_1 = R(x)$

$(D-m_3)(D-m_4)\dots(D-m_n) = Y_2 \Rightarrow (D-m_2)Y_2 = Y_1$

$\Rightarrow y = ?$

روش اپراتوری معکوس:
جدول ص 63 کتاب

$\phi(D)y = R(x)$

$\phi(D)y_p = R(x) \Rightarrow y_p = \frac{1}{\phi(D)} R(x)$

مثال:

$\frac{dy}{dx} - 2y = e^x$

$(D-2)y_p = e^x$

$y_p = \frac{e^x}{D-2} \Rightarrow y_p = e^{2x}\int e^{-2x}\cdot e^x dx$

$y_p = e^{2x}\int e^{-x}dx = -e^{-x}$

Sabject : Date : / /

$y = y_c + y_p \Rightarrow c_1 e^{2x} - c_2 e^{x}$

در جدول ص 63 a و c و D و G مهم

مثال: 3 ص 60

$(D^3 + D)y = e^{-2x} \cdot \cos 2x$

$$\boxed{(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3y^2x - y^3}$$

یادآوری

ص 63

$y_p = \frac{1}{(D^3+D)} \cdot e^{-2x} \cdot \cos 2x$

قسمت G

$e^{px} \frac{1}{\phi(D+P)} F(x)$

$y_p = e^{-2x} \times \frac{1}{(D-2)^3 + (D-2)} \cos 2x$ G

$y_p = e^{-2x} \frac{1}{D^3 - 6D^2 + 13D - 10} \cos 2x$

$y_p = e^{-2x} \frac{1}{D(-(2))^2 - 6(-(2)^2) + 13D - 10} \cos 2x$

$y_p = e^{-2x} \frac{1}{-4D + 24 + 13D - 10} \cos 2x$

$y_p = e^{-2x} \times \frac{1}{9D + 14} \cdot \cos 2x$

در مزدوج ضرب

$y_p = e^{-2x} \cdot \frac{9D - 14}{(9D)^2 - (14)^2} \cos 2x$

$y_p = \frac{e^{-2x}}{81(-4) - 196} (9D - 14) \cos 2x = \frac{e^{-2x}}{-520} (-18 \sin 2x - 14 \cos 2x)$

$y_p = \frac{e^{-2x}}{260} (9 \sin 2x + 7 \cos 2x)$

ARSH $(D^3 + D)y = 0$

$D(D^2+1)y = 0 \quad D = 0$

$$y_c = c_1 + c_2 \cos x + c_3 i \sin x$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1 + c_2 \cos x + i c_3 \sin x + c_4 \left[\frac{e^{-2x}}{260} (9 \sin 2x + 7 \cos 2x) \right]$$

Frobenius حل معادله دیفرانسیل به روش سری توانی

EX) $xy'' + 2y' - yx = 0$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\beta}$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\beta-1} (k+\beta)$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\beta-1)(k+\beta) x^{k+\beta-2}$$

$$\sum c_k (k+\beta)(k+\beta-1) x^{k+\beta-1} + \sum 2c_k (k+\beta) x^{k+\beta-1} - \sum c_k x^{k+\beta+1} = 0$$

$$\left[(k+\beta-1)(k+\beta) c_{k+1} + 2(k+\beta+1) c_{k+1} - c_{k-1} \right] x^{k+\beta}$$

$$(k+\beta+1)(k+\beta) c_{k+1} + 2(k+\beta-1) c_{k+1} - c_{k-1} = 0$$

$$k+1 = 0 \Rightarrow k = -1 \qquad \beta(\beta+1) c_0 = 0 \Rightarrow \beta = 0,\ \beta = -1$$

$\beta = -1$

$$k(k+1) c_{k+1} - c_{k-1} = 0$$

$$c_{k+1} = \frac{c_{k-1}}{k(k+1)} \Rightarrow c_2 = \frac{c_0}{1 \times 2} = \frac{c_0}{2!}$$

$$C_3 = \frac{C_1}{2\times 3} = \frac{C_0}{1\times 2\times 3}$$

$$C_4 = \frac{C_2}{3\times 4} = \frac{C_0}{1\times 2\times 3\times 4} \Rightarrow C_k = \frac{C_0}{k!}$$

$$\Rightarrow y = \sum C_k x^{k+r} = \sum C_k x^{k-1} = C_0\left(x^{-1} + \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} + \dots\right) + C_1\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right.$$

$$y = \frac{C_0 \sinh x + C_1 \sinh x}{x}$$

فصل هفتم

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

شامل یک متغیر وابسته و ۲ یا چند متغیر مستقل می باشد برای نمونه مسئله انتقال حرارت که T وابسته به زمان

و طول می باشد در تغییر با ...

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

مرتبه اول $a(\cdot)\frac{\partial u}{\partial x} + b(\cdot)\frac{\partial u}{\partial y} + c(\cdot)\frac{\partial u}{\partial z} + d(\cdot)\frac{\partial u}{\partial t} + f(\cdot) = g(\cdot)$

$$a(\cdot)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(\cdot)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(\cdot)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + d(\cdot)\frac{\partial u}{\partial x} + e(\cdot)\frac{\partial u}{\partial y} + f(\cdot)u = g(\cdot)$$

معادله دیفرانسیل پاره‌ای

- خطی
- شبه خطی
- غیرخطی

$[(\cdot) = (x, y, z, t)]$ ضرایب ثابت یا مستقل از u باشد خطی

$[(\cdot)\ x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}]$ شبه خطی

$$[\ (\cdot) = \left(x, y, u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)$$ غیرخطی مشتق هم مرتبه باشد

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ خطی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(T) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ شبه خطی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$ شبه خطی — جمله دوم یک مرتبه کمتر

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$ غیرخطی مشتق هم مرتبه

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم:

$b^2 - 4ac < 0$ بیضوی

$b^2 - 4ac > 0$ هذلولی

$b^2 - 4ac = 0$ سهمی

مثال:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$a = 1$ $b^2 - 4ac < 0$ بیضوی

$b = 0$

$c = 1$

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$ $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$ $b^2 - 4ac = 0$ سهمی

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$a = c^2$ $b^2 - 4ac > 0$ هذلولی

$b = 0$

$c = -1$

انواع شرایط مرزی :

سه شرط

۱- مقادیر متغیر وابسته در نقاطی مشخص متغیر مستقل معلوم است

$x=0 \quad t=0 \quad T=T_0$

$T=T_0 \quad 0<x<1 \quad T=T_0$

۲- مقدار مشتق متغیر وابسته عددی ثابت یا تابعی از متغیر مستقل باشد

$t=0 \quad \frac{\partial T}{\partial x}=0$ عایق

۳- مشتق متغیر وابسته به صورت تابعی از متغیر غیر مستقل باشد

$k\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=h\left(T(0,t)-T_\infty\right)$

اگر شرایط مرزی به صورت جملات مشتقات متغیر غیر مستقل باشند شرایط مرزی همگن و در غیر این صورت غیر همگن است

روشهای حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای روش جداسازی متغیرها :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial u^2}$$

$$u=f(x)\cdot g(t)$$

روش حل به کمک جداسازی متغیرها ابتدا تابع غیر مستقل را به صورت تابعی از متغیرهای مستقل نوشته سپس مشتقات جزئی موجود در مسئله را می‌سازیم آن‌ها را برابر گرفته و سپس مرتب می‌کنیم پس از مرتب شدن برابر با مقدار ویژه λ می‌گیریم پس هر معادله دیفرانسیل را به کمک مقدار ویژه λ حل می‌کنیم و آنگاه به کمک شرایط مرزی شرط اولیه ثابت‌ها را بدست آورده و از آنجا $g(t)$ و $f(x)$ را کامل می‌کنیم پس تابع $u(x,t)$ را می‌سازیم

Sabject :   Date : / /

EX) $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial u}{\partial x}$ (1) $u(x,t) = 7e^{-3x}$ شرط مرزی

با استفاده از روش جداسازی متغیرها

حل) $u = f(x)\cdot g(t) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f(x)\cdot\frac{dg}{dt} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = g(t)\cdot\frac{df}{dx} \end{cases}$ جایگذاری در معادله (1)

$\Rightarrow f(x)\cdot\frac{dg}{dt} = 2\frac{df}{dx}\cdot g(t) \xRightarrow{\div 2fg}$

$\frac{1}{2g(t)}\frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} = -\lambda^2$ چون مقدار هر دو طرف ثابت است.

مستقل از x   مستقل از t

$\begin{cases} \frac{1}{2g}\cdot\frac{dg}{dt} = -\lambda^2 \\ \frac{1}{f}\cdot\frac{df}{dx} = -\lambda^2 \end{cases}$ حل معادله $\Rightarrow \begin{cases} g(t) = c_1 e^{-2\lambda^2 t} \\ f(x) = c_2 e^{-\lambda^2 x} \end{cases}$ جایگذاری در معادله $\Rightarrow u(x,t) = f(x)\cdot g(t)$

$u(x,0) = c_1 e^{-2\lambda^2 t}\cdot c_2 e^{-\lambda^2 x}$

در $t=0$: $u(x,0) = c_1c_2e^{-\lambda^2 x} = 7e^{-3x}$ $\begin{cases} c = 7 \\ -\lambda^2 = -3 \\ \lambda^2 = 3 \end{cases}$

$u(x,t) = 7e^{-2\times 3t}e^{-3x}$

$\boxed{u(x,t) = 7e^{-6t-3x}}$

مثال (7.2) میله‌ای باریک و بلند به طول L در دمای اولیه $f(x)$ قرار دارد. در زمان $t\geq 0$ دو انتهای آن به دمای صفر رسیده و ثابت می‌ماند. توزیع دما را در طول میله برحسب زمان بدست آورید.

فرمول $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

از روش جداسازی متغیرها

$T(x,t) = ?$ $T(x,t) = \phi(x)\cdot g(t)$

شرایط مرزی $\begin{cases} T(0,t) = 0 \\ T(L,t) = 0 \end{cases}$

شرط اولیه $T(x,0) = f(x)$

Sabject :

Date : / /

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \phi(x) \cdot \frac{dg}{dt} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = g(t) \cdot \frac{d^2\phi}{dx^2} \end{cases} \xrightarrow[\text{جایگذاری}]{\text{در فرمول ①}} \phi(x) \times \frac{dg}{dt} = \alpha \frac{d^2\phi}{dx^2} g(t) \xrightarrow{\div \alpha \phi g}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha g} \frac{dg}{dt} = \frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{dx^2} = \gamma \rightarrow \text{ثابت یکسان}$$

$$\begin{cases} T(0,t) = 0 = \phi(0) \cdot g(t) = 0 \Rightarrow \phi(0) = 0 \\ T(L,t) = 0 = \phi(L) \cdot g(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(L) = 0$$

$\gamma = 0 \Rightarrow \phi(x) = C_1 + C_2 x$ X قابل قبول نیست

$\phi(0) = 0$ $C_1 = 0$

$\phi(L) = 0$ $C_2(L) = 0$

$\phi(x) = 0$ $C_2 = 0$

$g(t) = C_3 e^{\alpha \lambda^2 L}$

$\phi(x) = C_4 \sin h \lambda x + C_5 \cos h \lambda x$

$\phi(0) = 0$ $C_5 = 0$ $\Rightarrow \phi(x) = 0$

$C_4 = 0$ $\phi(L) = 0$

$$\gamma > 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha g} \frac{dg}{dt} = \frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{dx^2} = +\lambda^2$$

$g(t) = C_6 e^{-\alpha \lambda^2 L}$

$\phi(x) = C_7 \cos \lambda x + C_8 \sin \lambda x$

$\phi(0) = 0$ $C_8 \sin \lambda L = 0$

$\phi(L) = L$ $\sin \lambda L = 0 \rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}$

ARSH

$$T(x,t) = C_6 \, e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \, . \, C_8 \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\boxed{T(x,t) = C_6 C_8 \, e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \, . \sin \frac{n\pi}{L} x}$$

$$T(x,0) = f(x) \qquad C . \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x)$$

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \qquad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$f(x) = 100$$

$$L = 1$$

$$b_n = 2 \int_0^1 100 \sin n\pi x$$

$$b_n = \frac{200}{n\pi} (1 - \cos n\pi \quad \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{400}{n\pi} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{400}{n\pi} e^{-\alpha(n\pi)^2 t} . \sin n\pi x$$

$$\frac{400}{\pi} e^{-\alpha\pi^2 t} . \sin \pi x + \frac{400}{3\pi} e^{-\alpha 9\pi^2 t} + \sin 3\pi x$$

$$T(x,t) = \frac{400}{n\pi} e^{-\alpha\pi^2 t} = 0$$

این جدول در کتاب جبر 213 تابع ویژه $\phi(x)$ مقادیر ویژه λ شرایط مرزی

ص 214 برای بدست آوردن a_0

مثال 7,3

معادلات دیفرانسیلی با شرط مرزی ناهمگن:

برای حل چنین معادلات دیفرانسیلی باید $T(x,t)$ را به فرم $T(x,t)=v(x,t)+u(x)$

نوشت در مرحله بعد باید شرایط مرزی ناهمگون را باید به صورت شرایط مرزی همگن تبدیل کنیم

$$T(0,t)=A \quad \left\{ T(0,t)=v(0,t)+u(0) \qquad \begin{aligned} v(0,t)&=0 \\ u(0)&=A \end{aligned} \right.$$

اگر B_n سینوس

اگر A_0, A_n cos

$$T(L,t)=B \quad \left\{ T(L,t)=v(L,t)+u(L) \qquad \begin{aligned} v(L,t)&=0 \\ u(L)&=B \end{aligned} \right.$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0$$

مثال 7-3 حل شود اگر دو طرف میله در مثال 7-2 عایق باشد جواب را بدست آورید:

$$u=c_1+c_2x,$$

$$u(0)=c_1+c_2=A \qquad c_1=A$$

$$\boxed{u(x)=A+\frac{B-A}{L}x}$$

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$T(x,0)=f(x)$$

$$v(x,0)+u(x)=f(x)$$

$$v(x,0)=f(x)-u(x)$$

$$f(0)-u(0)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L\left[f(x)-A+\frac{B-A}{L}x\right]\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

برای حل معادلات دیفرانسیل ~~~~ پاره با شرایط مرزی ناهمگن:

۱) $T(x,t) = V(x,t) + u(x)$

۲) شرایط مرزی ناهمگن را به صورت $T(x,t)$ نوشته و آن را همگن می کنیم T
مانند صفحه قبل

۳) از $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ $u = c_1 + c_2 x_1$

$u(0) = c_1 + c_2(0) = A$

۴) مقدار $V(x,T)$ را که به صورت همگن است طبق روابط قبل و جدول ص 215 مقدار تابع ویژه و مقادیر ویژه را بدست می آوریم یعنی λ سپس b_n که

$T(x,0) = f(x)$

$v(x,0) + u(x) = f(x)$

$v(x,0) = f(x) - u(x)$

$$v(x,t) = \sum^{\infty} b_n e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$f(0) - u(0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x) - A + \frac{B-A}{L}x\right] \sin \frac{n\pi}{L} x\, dx$$

پس مقدار b_n محاسبه شده و از آن جا مقدار $V(x,t)$ بدست می آید $u(x)$ که قبلا بدست آوردیم و $T(x,t)$ را بدست می آوریم

مثال 7-7) معادله تغییرات دما را در یک میله ی فلزی با شرایط زیر حل کنید T

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$T(x,t) = ?$ $\frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = B$ $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$

$T(0,t) = A$ $T(x,0) = f(x)$

ARSH

$u(x) = A + Bx$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$$

$$T(0,t) = v(0,t) + u(x) = A \quad \begin{cases} v(0,t) = 0 \ \checkmark \\ u(0) = A \end{cases}$$

$u(x) = A + Bx$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(L,t) + \frac{\partial u(x)}{\partial x} = B \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x}(L,t) = 0 \ \checkmark \\ \frac{\partial u(x)}{\partial x} = B \end{cases}$$

$$\sum b_n e^{-\alpha\left(\frac{2n+1}{2L}\pi\right)^2 t} \sin\left(\frac{2n+1}{2L}\pi\right)x$$

$$f(x) - (A+Bx) = \sum_{1}^{\infty} b_n \underbrace{e^{-\alpha\left(\frac{2n+1}{2L}\pi\right)^2 t}}_{A} \sin\left(\frac{2n+1}{2L}\pi\right)x$$

با جایگذاری $t=0$ مقادیر b_n تعیین می‌شوند

$$b_n = \frac{\int_0^L (f(x) - Bx - A)\sin\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right)dx}{\int_0^L \sin^2\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right)}$$

$$T(x,t) = A + Bx + \sum_{1}^{\infty} b_n e^{-\alpha\left(\frac{2n+1}{2L}\pi\right)^2 t} \sin\frac{2n+1}{2L}\pi x$$

$$\lim_{t\to\infty} T(x,t) = A + Bx = u(x)$$